数理解析研究所講究録
781巻 1992年 129-131

入射的加群のアナロジーとしての h_*-入射的スペクトラムについて

広島大理 大川哲介 (Tetsusuke Ohkawa)

環上の加群について"入射的"なる概念がある. これのCW複体, スペクトラムについてのアナロジーは, [1]に於いて若干調べたが, ここではその後の結果も含めて述べる.

環R上の加群MがR上入射的であるとは, 任意のR-加群N, N′の間の任意の単射 $f: N \to N'$ に対して, $f^*: \mathrm{Hom}_R(N', M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M)$ が全射となることをいう. 又R-加群M, Nの間の射 $f: M \to N$ が(R-) injective enveloping mapであるとは, ①単射である, ②Nは入射的, ③ $f(M) \subset N' \subset N$ なる任意の入射的R-加群N′について, $N' = N$ が成立することをいう. これについて次が成立する

定理. 任意のR-加群Mに対し, あるR-加群Nと射f : $M \to N$ で; fがR-injective enveloping mapとなるものが存在する.

この事実の位相的アナロジーを考える. 以下 $\mathcal{S}$ をCW-スペクトラムの圏, $\mathcal{T}$ をそのホモトピー圏, h_* を一つの一般

ホモロジーとする. $X \in Ob\,\mathcal{S}$ が h_*ー入射的であるとは, スペクトラム間の任意の map $f : Y \to Z$ に対し, もし $h_*(f)$ が単射ならば $h^* : [Z, X] \longrightarrow [Y, X]$ が全射となることをいう.
又スペクトラム間の map $f : X \to Y$ が h_*-injective enveloping map であるとは, ① $h_*(f)$ は単射, ② Y は h_*ー入射的, ③ 任意のスペクトラム Z 及び任意の map $g : Y \to Z$ に対し, もし $h_*(g \circ f)$ が単射なら $h_*(g)$ も単射になることをいう. これについて次が成立する ([1]).

定理. 任意のスペクトラム X に対し, 適当なるスペクトラム Y と, 適当なる map $f : X \to Y$ で f が h_*-injective enveloping map となるものが存在する

さて, 代数の方では次が成立する

定理 Rー加群 M が入射的で直既約ならば $A = End_R(M)$ に於いて非可逆元全体 I はイデアルをなし, A/I は斜体となる.

この定理は前頁の定理から容易に得られる. これについて次の位相的アナロジーを得た.

定理 スペクトラム X が h_*ー入射的で, $\mathcal{S}$ で直既約ならば $A = [X, X]_*$ に於いて, 非可逆元全体 I は次数イデアルをなし, A/I は次数斜体となる.

証明は代数の場合と平行にはいかず若干複雑になるので略する　次に $B = A/I$ として如何なる次数斜体が生じるかという問題を生ずるが、これについて次が成立する

定理. ① $ch(B) = 0$ なら $B \cong \mathbb{Q}$

② 任意の有限体は（適当に h_*, X を取って）B として実現することが出来る

③ n : 自然数, p : 素数とするとき $\mathbb{Z}_p[v, v^{-1}]$（但し $\deg v = 2(p^n - 1)$）も実現出来る

文献

[1] The injective hull of homotopy types with respect to generalized homology functors, Hiroshima M. J. 19 (1989) 631 – 639